Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра ИРТ

Реферат на тему:

Разновидности методы Рунге-Кутта для решения задачи Коши. Постановка задачи. Писание методов. Преимущества и недостатки методов.

Выполнил:

студент группы 7M1701

Безрученко Д.А.

Минск 2017

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются уравнения, содержащие одну независимую переменную, искомую функцию u=u(x) и одну или несколько ее производных. Например:

|  |  |
| --- | --- |
| F(x, u, u', …u(n)) = 0. | (1) |

Здесь х — независимая переменная; u(i) - i-я производная неизвестной функции u(x) diu/dxi, i=1,2…, n; F - некоторая функция от переменных x, u, u', u'',…. Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком n, входящей в уравнение производной. Например, уравнения первого и третьего порядка можно представить как:

|  |  |
| --- | --- |
| F(x, u, u') = 0; F(x, u, u', u'', u''') = 0. | (2) |

Если в уравнениях (1) и (2) старшую производную явно выразить через производные более низкого порядка и независимую переменную, то получаются уравнения, разрешенные относительно старшей производной. Например:

|  |  |
| --- | --- |
| u' = f(x,u);  u''' = f(x, u, u', u''); | (3)  (4) |

Дифференциальные уравнения бывают линейными и нелинейными. Линейным уравнением называется уравнение, в котором неизвестная функция и ее производные входят в него в первой степени. Примеры линейных уравнений первого и второго порядка:

|  |  |
| --- | --- |
| u' = 2xu + cosx; u'' = 3u' – 5xu + tgx | (5) |

Остальные уравнения называются нелинейными.

Решением дифференциального уравнения называется произвольная функция φ(x), которая удовлетворяет этому уравнению, то есть после подстановки в уравнение превращает его в тождество. Например, при подстановке u = φ(x) в уравнения (3) получаем:

|  |  |
| --- | --- |
| φ'(x) = f(x, φ(x)); φ'''(x) = f(x, φ'(x), φ''(x)). | (6) |

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го

порядка, как известно, содержит n произвольных постоянных с1, с2, ..., сn и имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
| u = φ(x, с1, с2, …, сn). | (7) |

Частное решение получается из общего (7) путем задания определенных значений произвольным постоянным. Например, для уравнения первого порядка u' = f(x, u) из общего решения u = φ(x, с1) частное получается в результате задания произвольной константе с1 некоторого значения с1 = с0:

|  |  |
| --- | --- |
| u = φ(x, с0). | (8) |

Для выделения частного решения из общего для уравнений высшего порядка нужно задать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных содержится в общем решении, то есть каков порядок уравнения.

Для системы nобыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

где U = (u1, u2, …, un)T, F(x, U) = (f1(x, U),f2(x, U),…,fn(x, U))T – векторы, общее решение содержит n произвольных постоянных U = Ф(x, с1,…,сn), и для выделения его частных решений надо также задать n дополнительных условий, то есть столько, сколько уравнений содержит система.

Аналогичным образом определяется количество дополнительных условий n для системы уравнений произвольного порядка: n = , где j – номер уравнений системы; kj – его порядок; m – количество уравнений системы.

В качестве дополнительных условий задаются значения искомой функции и ее производных при некоторых x. В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения различают два типа задач: задачи Коши и краевые задачи.

Если дополнительные условия задаются в одной точке х, то задача называется задачей Коши, а дополнительные условия называются начальными условиями. Точка х = x0, в которой они задаются, — начальной точкой.

Если дополнительные условия задаются в нескольких точках, то есть при разных х, то такая задача называется краевой, а дополнительные условия — краевыми или граничными условиями. Обычно граничные условия задаются в точках х = а и х = b, являющихся границами области решения дифференциального уравнения.

Темой данного реферата является описание методов Рунге-Кутты для решения задачи Коши, поэтому далее будет рассматриваться только задача Коши.

Постановка задачи Коши.

Постановка задачи Коши формулируется как нахождение решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условия.

В общем случае для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка задача Коши формулируется как нахождение решения уравнения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  | (10) | |  |

при x > x0, U(x0) = U0, где x0 – начальное значение x; U0 – начальное значение вектора U, U = (u1, u2, …, un)T; F(x, U) = (f1(x, U),f2(x, U),…,fn(x, U))T.

Будем предполагать, что решение системы (10) существует и единственно. Для этого, как известно из теоремы Коши, необходимо, что бы функции fi(x, U), и их частные производные по второму аргументу

(i=1, 2, …, n; j = 1,2, …, n), были непрерывны по всем аргументам в замкнутой области:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

Здесь a, b – некоторые константы.

Из этих требования следует, что функция fi ограничены в области D, то есть удовлетворяют условию.

Например, для уравнений первого, второго, третьего порядков задача Коши формулируется следующим образом (12).

Найти решения уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Здесь А, В, u0 – некоторое константы; - производные функции u.

Следует сказать несколько слов о методах решения дифференциальных уравнений. И классификации алгоритмов.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений применяются аналитические, приближенные и численные методы.

Аналитические методы позволяют получать решения дифференциальных уравнений через элементарные или специальные функции в конечном виде и являются эффективным средством исследования уравнений, однако применимы лишь для ограниченного класса дифференциальных уравнений — линейных, с постоянными коэффициентами.

Приближенные методы используют различные упрощения исходных уравнений: линеаризацию, разложения в ряд по некоторому малому параметру, асимптотические методы и др. Однако они также имеют ограниченную область применения, хотя и являются эффективным средством исследования решения.

Наиболее мощными и универсальными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений являются численные методы, позволяющие получать решения тогда, когда традиционные, классические, методы не помогают. Среди численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений одним из важнейших является метод конечных разностей.

Существуют явные и неявные алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Явными методами называют те методы, которые используют в качестве аргумента правой части уравнения значение f(x) с предыдущего шага. Явные схемы записываются на каждом шаге интегрирования в виде рекуррентного алгебраического соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Явные методы особенно просты, так как для их реализации следует просто вычислить алгебраическое выражение (13).

Неявные методы связаны с тем, что на каждом шаге интегрирования искомые значения входят как в разностною форму производной, так и в правую часть уравнения, которое можно записать следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Поскольку изначально неизвестны и подлежат определению, то для реализации неявных методов на каждом шаге интегрирования дифференциального уравнения придется решать алгебраическое уравнение, в общем случае, нелинейное.

Явные методы, как правило, очень просты и экономичны в плане компьютерных вычислений. Основной особенностью неявных методов служит их применимость к решению жестких дифференциальных уравнений.

Методы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений разделяются на два класса:

1. Одноступенчатые методы, использующие данные о решении только

в одной точке. Однако приходится вычислять функции fi(x, u), в нескольких точках (x, u).

1. Многоступенчатые, или многошаговые методы – методы, не

требующие много повторных вычислений функции fi(x, u), использующие данные о решении в нескольких точках, что вынуждает применять одношаговые методы для запуска метода и при изменении шага интегрирования.

Общая формулировка методов Рунге-Кутта.

1. Формулировку методов Рунге–Кутта, ради простоты, рассмотрим на примере решения одного уравнения первого порядка, так как обобщение методов на систему уравнений не представляет трудностей и будет показано позже.
2. Итак, рассмотрим задачу Коши для уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Явный m-этапный метод Рунге-Кутта заключается в следующем. Пусть численное решение задачи Коши известно в точке xn – yn = y(xn). Задаются некоторые числовые коэффициенты ai, bij, i = 2, 3, …, m, j = 1, 2, …, (m-1); , i = 1, 2, …, m и последовательно вычисляются следующие функции:

k1 = f(xn, yn);

k2 = f(xn + a2h, yn + b21hk1);

k3 = f(xn + a3h, yn + b31hk1 + b32hk2);

……………………………………..

km = f(xn + amh, yn + bm1hk1 + bm,m-1hkm-1);

затем из формулы

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

находится решение задачи в следующей точке xn-1 – y(xn+1). Коэффициенты выбираются из соображений точности аппроксимации разностным уравнением (16) дифференциального (15). Чтобы уравнение (16) аппроксимировало (15), необходимо потребовать, чтобы Методы Рунге-Кутта при m>5 используются нечасто. Наиболее широкое применение нашли методы Рунге-Кутта при m = 4.

Простейшие методы типа Рунге-Кутта.

Метод Эйлера является самым простым методом решения задачи Коши типа Рунге–Кутта. В следующих примерах будет рассматриваться одно уравнение первого порядка.

Требуется найти решение уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

при x > x0, u(x0) = u0 до x = xN.

Решение задачи строится следующим образом. Покрывается область определения решения D функции u сеткой равноотстоящих точек, начиная от начальной точки: x0, x1, x2, …, xN. Расстояния между точками, ради простоты, считают равными h = xn – xn-1 = const. Вводятся сеточные функции un = u(xn); yn = y(xn); fn = (xn, yn), определенные в узлах сетки , то есть в точках x0, x1, x2, …, xN. Функции yn, f(xn, yn) соответствуют численному решению разностной задачи, а u(xn) – решению дифференциальной задачи (17).

Предполагая, что известно значение yn в точке xn, и заменяя производную в уравнении выражением u'(xn) = (yn+1-yn)/h, а значение u(xn) в функции f(x, u) yn, получим разностное уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Решение этого уравнения находится явным образом по рекуррентной формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| yn+1 = yn + hf(xn, yn), n = 1, 2, …, N | (19) |

Геометрическая интерпретация метода Эйлера.

Пусть в точке xn получено численное решение задачи yn. Полагая yn = un, проводим через эту точку (xn, yn) гипотетическую интегральную кривую u(x) и касательную к ней f(xn,yn) как показано на рисунке 1. Она при принятых допущениях равна f(xn,yn).

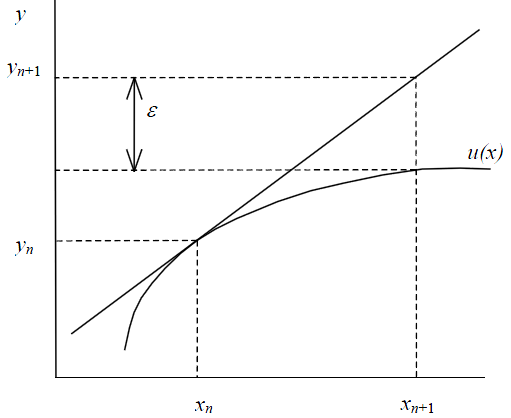


Рис. 1. Метод Эйлера

Точка пересечения этой касательной с перпендикуляром к оси х, проходящим через точку xn+1, дает приближенное значение функции уn+1 в точке xn+1. При этом погрешность решения равна e = уn+1 - un+1. Следовательно, метод Эйлера есть линейная экстраполяция функции уn в точку xn+1 по значениям ее и ее производной в точке xn:

|  |  |
| --- | --- |
| yn+1 = yn + f(xn, yn)( xn+1 - xn). | (20) |

Этот метод является методом Рунге–Кутта первого порядка O(h), как будет показано далее. Он обладает большой погрешностью и часто оказывается неустойчивым, так как малая ошибка в начальных данных или из-за округлений при вычислениях увеличивается с ростом х. Поэтому этот метод редко применяется на практике. Чаще в расчетах применяются методы Рунге-Кутта более высокого порядка точности, например, второго или четвертого.

Исправленный метод Эйлера.

Этот метод основывается на вычислении y(xn+1) в последующей точке xn+ по значению среднеарифметической величины тангенсов улов наклона касательной к интегральной кривой y(x) в двух точках xn и xn+1. При этом предполагается известным решение задачи yn в точке xn.

Метод состоит из двух шагов:

1) По методу Эйлера (19) предварительно находится приближенное значение в точке x = xn + h по формуле , и в ней вычисляется функция ;

2) Тангенсы углов наклона касательных в точках (xn, yn) и () складываются, и берется их среднее арифметическое значение Ф(xn, yn, h):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

После чего находится окончательное значение функции уn+1 в точке xn+1 по формуле уn+1 = уn + hФ ().

Исправленный метод Эйлера можно представить в стандартном для методов Рунге-Кутта виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

Геометрическая интерпретация исправленного метода Эйлера

Как в методе Эйлера, в точке () строится касательная L1 к гипотетической интегральной кривой u(x), и находится предварительное значение в точке пересечения этой касательной с перпендикуляром к оси х, проходящим через точку xn+1 как показано на рисунке 2. Далее, в точке (xn+1, ) снова строится касательная L2 к кривой u(x). Затем определяется среднеарифметическое тангенсов наклона этих касательных (кривая L3) и проводится через точку () линия L0, параллельная линии L3. Точка пересечения этой линии с ординатой, проходящей через точку xn+1, дает уточненное значение функции yn+1 в точке xn+1.

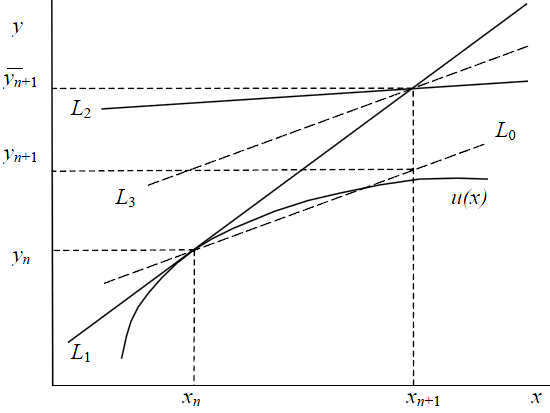


Рис.2 Исправленный метод Эйлера

Оценка погрешности аппроксимации показывает, что метод имеет второй порядок аппроксимации O(h2).

Модифицированный метод Эйлера.

В этом методе вместо усредненного значения наклона касательных в точках () и используется значение угла наклона касательной в точке (), расположенной посередине между точками xn и xn+1. Как и ранее, предполагается известным значение решения в точке xn.

Метод состоит из двух шагов:

1) первый шаг – расчет значения функции в точке (xn+h/2) по методу Эйлера (19):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

2) второй шаг – расчет функции y в точке с координатой xn+1 с использованием значения функции f() в точке () –

yn+1 = yn + hf(xn + h/2, yn+1/2).

Данный метод можно записать в обычном для методов Рунге-Кутта виде:

Этот метод также является методом Рунге-Кутта второго порядка. Здесь также приходится вычислять дважды функцию f(x, y) для получения решения в следующей точке xn+1.

Геометрическая интерпретация модифицированного метода Эйлера представлена ниже:

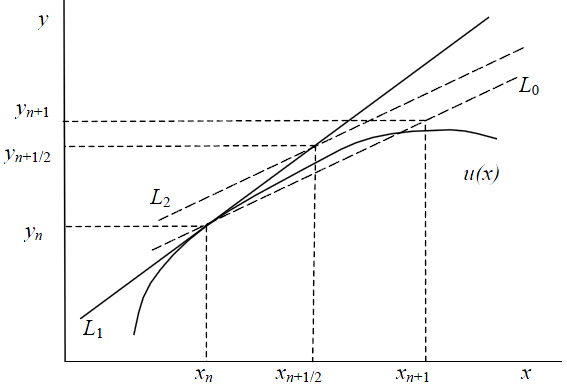


Рис. 3 Модифицированный метод Эйлера.

В точке () строится касательная L1 к гипотетической интегральной кривой u(x). Точка пересечения ее с перпендикуляром к оси x, проходящим через точку xn+h/2, дает значение функции . В этой точке снова проводится касательная L2 к кривой u(x). Для получения решения yn+1 проводится через точку () линия L0 параллельно касательной L2. Точка пересечения L0­ c ординатой xn+1 дает искомое решение yn+1.

К недостаткам всех явных методов типа Рунге-Кутта можно отнести то, что им всем свойственна неограниченно возрастающая неустойчивость с увеличением h начиная с некоторого порога.

Семейство двухэтапных методов.

При m = 1 получается одноэтапный метод – метод Эйлера (19). При m = 2 – семейство двухэтапных методов следующего вида:

|  |  |
| --- | --- |
| k1 = f(xn, yn); | (23) |
| k2 = f(xn + a2h, yn + b21hk1); |  |
| yn+1 = yn + h() |  |

Далее, в результате элементарных математических преобразований, получается однопараметрическое семейство двухэтапных методов Рунге-Кутта второго порядка аппроксимации, которое можно записать в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

Где .

При получаем модифицированный метод Эйлера:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

При получаем исправленный метод Эйлера:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

Следует отметить, что двухэтапных методов Рунге-Кутта третьего порядка аппроксимации для общего вида f(x, u), зависящих от функции u(x), то есть решения уравнения, не существует. Наивысший порядок аппроксимации двухэтапного метода Рунге-Кутта для случая с функциями f(x), зависящими только от x, является третий порядок O(h3).

Методы Рунге-Кутта более высокого порядка.

Методы Рунге–Кутта более высокого порядка получаются точно так же, как и двухэтапные методы. Выписываются для них выражения невязок, раскладываются в ряд Тейлора в окрестности точки (xn, un) функции, входящие в невязки, затем группируются члены одного порядка малости по h и приравниваются к нулю. В результате получаются уравнения для определения коэффициентов метода аi, bij, σi . Порядок остаточного члена невязки O(hp) определяет порядок аппроксимации разностного метода.

Для трехэтапных методов Рунге–Кутта (m = 3) в общем случае существует двухпараметрическое семейство методов третьего порядка аппроксимации. В качестве примера приведем два метода третьего порядка.

Первый метод:

k1=f(xn, yn); k2=f(xn+h/2, yn+k1h/2); k3=f(xn+h, yn-hk1+2hk2);

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

Второй метод:

k1=f(xn, yn); k2=f(xn+h/3, yn+k1h/3); k3=f(xn+2/3h, yn+2/3hk2);

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

В случае четырехэтапных методов (m = 4) получается также многопараметрическое семейство, исследовать которое значительно сложнее. Из множества методов четвертого порядка приведем три.

Первый метод:

k1=f(xn, yn); k2=f(xn+h/4, yn+k1h/4);

k3=f(xn+h/2, yn+h/2k2); k4=f(xn+h, yn+hk1-2hk2+2hk3);

|  |  |
| --- | --- |
|  | (29) |

Второй метод:

k1=f(xn, yn); k2=f(xn+h/3, yn+k1h/3);

k3=f(xn+2h/3, yn-hk1/3+hk2); k4=f(xn+h, yn+hk1-hk2+hk3);

|  |  |
| --- | --- |
|  | (30) |

Широкое распространение получил третий метод четвертого порядка, обычно называемый просто методом Рунге-Кутта:  
k1=f(xn, yn); k2=f(xn+h/2, yn+k1h/2);

k3=f(xn+h/2, yn+hk2/2); k4=f(xn+h, yn+hk3);

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

Получим решение задачи Коши для модельного уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (32) |

Методом Рунге-Кутта четвертого порядка (31). В этом случае формулы для коэффициентов ki(i=1, 2, 3, 4) принимают следующий вид:

k1=; k2=;

k3=; k4=;

Подставляя в формулу (30) значения ki, получаем решение yn+1:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (33) |

Сравнивая с точным решением уравнения (32) мы видим, что выражение в скобках представляет собой пять первых членов разложения функции eλh в ряд Тейлора.

К достоинствам многошаговых методов можно отнести следующее:

1) порядок аппроксимации не зависит от количества вычислений правой части;

2) оценка погрешности не требует дополнительных вычислений правой части.

К недостаткам многошаговых методов можно отнести следующее:

1) реализация данных методов при старте и смене шага требует использования одношагового метода;

2) смена шага сопряжена с большими вычислительными затратами.

Неявные методы Рунге-Кутта.

Важным классом методов решения жестких систем уравнений являются одношаговые методы Рунге-Кутты, имеющие следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (34) |

Где k1=f(xn+a1h,yn+b11hk1+b12hk2+…+b1mhkm);

k2=f(xn+a2h,yn+b21hk1+b22hk2+…+b2mhkm);

……………………………………………

km=f(xn+amh,yn+bm1hk1+bm2hk2+…+bmmhkm);

Значения коэффициентов ai, bij, σi (i, j = 1, 2, …, m) вычисляются после разложения функций yn+1, ki в ряд Тейлора и сведения невязки метода к минимуму путем приравнивания членов при степенях h(p-1) к нулю, где p – порядок аппроксимации схемы.

Таким образом, получаются:

неявная схема Рунге-Кутта третьего порядка O(h3):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (35) |

где

неявные схемы Рунге-Кутта второго порядка O(h2):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (36) |

где ,

и:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (37) |